Гр. 201

02/11/18

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 (1)

Подвариант № 1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ИЛИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Цель работы

освоить методы Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, применяемые для численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений) первого порядка.

Постановка задачи

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной и имеющее вид:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \ x_0 < x, \tag{1}$$

с дополнительным начальным условием, заданным в точке $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Предполагается, что правая часть уравнения (1) функция $f = f(x,y)$ такова, что гарантирует существование и единственность решения задачи Коши (1)-(2).

В том случае, если рассматривается не одно дифференциальное уравнение вида (1), а система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных неизвестных функций, то соответствующая задача Коши имеет вид (на примере двух дифференциальных уравнений):

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \ x > x_0. \end{cases} \tag{3}$$

Дополнительные (начальные) условия задаются в точке $x = x_0$:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \ y_2(x_0) = y_2^{(0)}. \tag{4}$$

Также предполагается, что правые части уравнений из (3) заданы так, что это гарантирует существование и единственность решения задачи Коши (3)-(4), но уже для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в форме, разрешенной относительно производных неизвестных функций.

Заметим, что к подобным задачам сводятся многие важные задачи, возникающие в механике (уравнения движения материальной точки), небесной механике, химической кинетике, гидродинамике и т.п.

Цели и задачи практической работы

1) Решить задачу Коши (1)-(2) (или (3)-(4)) наиболее известными и широко используемыми на практике методами Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, аппроксимировав дифференциальную задачу соответствующей разностной схемой (на равномерной сетке); полученное конечно-разностное уравнение (или уравнения в случае системы), представляющее фактически некоторую рекуррентную формулу, просчитать численно;
2) Найти численное решение задачи и построить его график;
3) Найденное численное решение сравнить с точным решением дифференциального уравнения (подобрать специальные тесты, где аналитические решения находятся в классе элементарных функций, при проверке можно использовать ресурсы on-line системы http://www.wolframalpha.com или пакета Maple и т.п.).

Отчет по практической работе

Отчет должен содержать

- титульный лист (образец прилагается);
- описание постановки задачи и ее целей;
- описание метода (алгоритма) решения;
- описание программы и ее оригинальный текст с комментариями;
- тесты, доказывающие корректность работы программы (не менее 3-5 тестов, проверенных непосредственно вручную или с помощью специализированного программного обеспечения.

Варианты заданий

Таблица 1.

Варианты задания правой части уравнения (1) и начального условия (2)

в случае одного дифференциального уравнения

Вариант	$f(x,y)$	(x_0, y_0)	Точное решение $y = y(x)$
1	$3 - y - x$	$(0,0)$	$4 - x - 4e^{-x}$
2	$\sin(x) - y$	$(0,10)$	$-0.5\cos(x) + 0.5\sin(x) + \frac{21}{2}e^{-x}$
3	$-y - x^2$	$(0,10)$	$-x^2 + 2x - 2 + 12e^{-x}$
4	$y - yx$	$(0,5)$	$5e^{-\frac{1}{2}x(-2+x)}$
5	$(y - y^2)x$	$(0,3)$	$\dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x^2}}$
6	$(x - x^2)y$	$(0,1)$	$e^{-\frac{1}{6}x^2(-3+2x)}$

Таблица 2.

Варианты задания правых частей системы (3) и начального условия (4)

в случае системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

Вариант	$f_1(x,u,v)$	$f_2(x,u,v)$	x_0	$y_1^{(0)}$	$y_2^{(0)}$
1	$\dfrac{u-v}{x}$	$\dfrac{u+v}{x}$	1	1	1
2	$x \cdot u + v$	$u - v$	0	0	1
3	$x + v^2$	$x \cdot u$	0	1	-1
4	$\sqrt{x^2 + 1.1 \cdot u^2} + v$	$\cos(2.1 \cdot v) + u$	0	0.5	1
5	$\cos(u + 1.1 \cdot v) + 2.1$	$\dfrac{1.1}{x + 2.1 \cdot u^2} + x + 1$	0	1	0.05
6	$\sin(1.1 \cdot u^2) + x + v$	$x + u - 2.1 \cdot v^2 + 1$	0	1	0.5

Варианты заданий

Таблица 1.

Варианты задания правой части уравнения (1) и начального условия (2)

в случае одного дифференциального уравнения

Вариант	$f(x,y)$	(x_0,y_0)	Точное решение $y=y(x)$
1	$3-y-x$	$(0,0)$	$4-x-4e^{-x}$
2	$\sin(x)-y$	$(0,10)$	$-0.5\cos(x)+0.5\sin(x)+\frac{21}{2}e^{-x}$
3	$-y-x^2$	$(0,10)$	$-x^2+2x-2+12e^{-x}$
4	$y-yx$	$(0,5)$	$5e^{-\frac{1}{2}x(-2+x)}$
5	$(y-y^2)x$	$(0,3)$	$\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x^2}}$
6	$(x-x^2)y$	$(0,1)$	$e^{-\frac{1}{6}x^2(-3+2x)}$

Таблица 2.

Варианты задания правых частей системы (3) и начального условия (4)

в случае системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

7	$\sin(x+u)+1.1\cdot v$	$2.1\cdot u-(x+v)^2$	0	0.5	1
8	$\cos(x+1.1\cdot v)+u$	$-v^2+2.1\cdot u+1.1$	0	0.25	1
9	$2.1\cdot v-u^2$	$e^{-u}+x+2.1\cdot v$	0	1	0.25
10	$v-\cos(x)$	$u+\sin(x)$	0	0	0
11	$\sin(2\cdot u^2)+x+v$	$x+u-2\cdot v^2+1$	0	1	0.5
12	$-2\cdot x\cdot u^2+v^2-x-1$	$\frac{1}{v^2}-u-\frac{x}{u}$	0	1	1
13	$\ln(2\cdot x+\sqrt{4\cdot x^2+v^2})$	$\sqrt{4\cdot x^2+u^2}$	0	0.5	1
14	$e^{-(u^2+v^2)}+2\cdot x$	$2\cdot u^2+v$	0	0.5	1
15	$\sqrt{x^2+1.2\cdot u^2}-v$	$\cos(2.2\cdot v)+u$	0	0.5	1
16	$\cos(u+1.3\cdot v)-2.1$	$\frac{1.3}{x+2.3\cdot u^2}+x+1$	0	1	0.05
17	$\sin(1.4\cdot u^2)-x+v$	$x+u-2.2\cdot v^2+1$	0	1	0.5
18	$\cos(x+1.5\cdot v)-u$	$-v^2+2.3\cdot u-1.2$	0	0.25	1
19	$\sin(x+u)-1.1\cdot v$	$2.5\cdot u-(x+v)^2$	0	0.5	1
20	$x+u-v^2+2$	$\sin(x-u)+2.1\cdot v$	0	1.5	0
21	$2.4\cdot v-u$	$e^{-u}-x+2.2\cdot v$	0	1	0.25

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 (2)

Подвариант № 2

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Цель работы

освоить метод прогонки решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.

Постановка задачи

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = -f(x),\ 1 < x < 0, \tag{1}$$

с дополнительными условиями в граничных точках

$$\begin{cases} \sigma_1 y(0) + \gamma_1 y'(0) = \delta_1, \\ \sigma_2 y(1) + \gamma_2 y'(1) = \delta_2. \end{cases} \tag{2}$$

Цели и задачи практической работы

1) Решить краевую задачу (1)-(2) методом конечных разностей, аппроксимировав ее разностной схемой второго порядка точности (на равномерной сетке); полученную систему конечно-разностных уравнений решить методом прогонки;
2) Найти разностное решение задачи и построить его график;
3) Найденное разностное решение сравнить с точным решением дифференциального уравнения (подобрать специальные тесты, где аналитические решения находятся в классе элементарных функций, при проверке можно использовать ресурсы on-line системы http://www.wolframalpha.com или пакета Maple и т.п.).

Отчет по практической работе

Отчет должен содержать

- титульный лист (образец прилагается);
- описание постановки задачи и ее целей;
- описание метода (алгоритма) решения;
- описание программы и ее оригинальный текст с комментариями;

- тесты, доказывающие корректность работы программы (не менее 3-5 тестов, проверенных непосредственно вручную или с помощью специализированного программного обеспечения.

Варианты заданий

1. $y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x$; $y(0.7) = 0.5$; $2y(1) + 3y'(1) = 1.2$.
2. $y'' - xy' + 2y = x - 1$; $y(0.9) - 0.5y'(0.9) = 2$; $y(1.2) = 1$.
3. $y'' + xy' + y = x + 1$; $y(0.5) + 2y'(0.5) = 1$; $y'(0.8) = 1.2$.
4. $y'' + 2y' - \frac{y}{x} = 3$; $y(0.2) = 2$; $0.5y(0.5) - y'(0.5) = 1$.
5. $y'' + 2y' - xy = x^2$; $y'(0.6) = 0.7$; $y(0.9) - 0.5y'(0.9) = 1$.
6. $y'' - y' + \frac{2y}{x} = x + 0.4$; $y(1.1) - 0.5y'(1.1) = 2$; $y'(1.4) = 4$.
7. $y'' - 3y' - \frac{1}{x} = 1$; $y(0.4) = 2$; $y(0.7) - 2y'(0.7) = 0;7$.
8. $y'' + 3y' - \frac{y}{x} = x + 1$; $y'(1.2) = 1$; $2y(1.5) - y'(1.5) = 0.5$.
9. $y'' - \frac{y'}{2} 3y = 2x^2$; $y(1) - 2y'(1) = 0.6$; $y(1.3) = 1$.
10. $y'' + 1.5y' - xy = 0.5$; $2y(1.3) - y'(1.3) = 1$; $y(1.6) = 3$.
11. $y'' + 2xy' - y = 0.4$; $2y(0.3) + y'(0.3) = 1$; $y'(0.6) = 2$.
12. $y'' - 0.5xy' + y = 2$; $y(0.4) = 1.2$; $y(0.7) + 2y'(0.7) = 1.4$
13. $y'' + \frac{2y'}{x} - 3y = 2$; $y'(0.8) = 1.5$; $2y(1.1) - y'(1.1) = 3$.
14. $y'' + 2x^2y' + y = x$; $2y(0.5) - y'(0.5) = 1$; $y(0.8) = 3$.
15. $y'' - 3xy' + 2y = 1.5$; $y'(0.7) = 1.3$; $0.5y(1) + y'(1) = 2$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Компьютерный практикум по учебному курсу

«ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

ЗАДАНИЕ № 2.

Численные методы решения дифференциальных уравнений

ОТЧЕТ

о выполненном задании

студента _____ учебной группы факультета ВМК МГУ

____

(фамилия, имя, отчество)

гор. Москва

2018 г.

п/п	ФИО студента	Вариант Задания № 2
1	АБДРАХМАНОВ АРТУР ФАРИТОВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 1, табл 2 - 11, Подвариант 2 (краевая задача): 12
2	АВАГЯН ДАВИД АРМЕНОВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 5, табл 2 - 20, Подвариант 2 (краевая задача): 15
3	АГУЛЕНКО СЕРГЕЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 6, табл 2 - 5, Подвариант 2 (краевая задача): 4
4	БАКЛАНОВА АНАСТАСИЯ ОЛЕГОВНА	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 3, табл 2 - 8, Подвариант 2 (краевая задача): 7
5	БЕТРОЗОВА БЕРТА ЕРМАКОВНА	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 3 табл 2 - 13, Подвариант 2 (краевая задача): 2
6	БОНДАРЕВ ИВАН ГЕННАДЬЕВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 5, табл 2 - 4, Подвариант 2 (краевая задача): 15
7	ГАВРИЛОВ ОЛЕГ АЛЕКСЕЕВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 6, табл 2 - 18, Подвариант 2 (краевая задача): 5
8	ЗОТОВ СТАНИСЛАВ МАКСИМОВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 2, табл 2 - 10, Подвариант 2 (краевая задача): 8
9	КОЗЛОВ АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 3, табл 2 - 17, Подвариант 2 (краевая задача): 5
10	КРАСИЛЬНИКОВ МАКСИМ ДЕНИСОВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 3, табл 2 - 4, Подвариант 2 (краевая задача): 15
11	ЛЫФЕНКО НИКИТА ИГОРЕВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 6, табл 2 - 21, Подвариант 2 (краевая задача): 9

12	МАКЕЕВ ВИТАЛИЙ ОЛЕГОВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 3, табл 2 - 19, Подвариант 2 (краевая задача): 2
13	МАМАЕВ ПАВЕЛ ВЯЧЕСЛАВОВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 2, табл 2 - 12, Подвариант 2 (краевая задача): 4
14	МОРКВИН АНДРЕЙ АНДРЕЕВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 5, табл 2 - 21, Подвариант 2 (краевая задача): 6
15	НАЗАРОВ ДМИТРИЙ ИЛЬИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 2, табл 2 - 8, Подвариант 2 (краевая задача): 14
16	ПАРЫГИН АРТЕМ АЛЕКСАНДРОВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 1, табл 2 - 9, Подвариант 2 (краевая задача): 15
17	ПОЛЯКОВ АРТЕМ ЕВГЕНЬЕВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 4, табл 2 - 14, Подвариант 2 (краевая задача): 6
18	РОМАНОВА ЮЛИЯ АНТОНОВНА	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 3, табл 2 - 17, Подвариант 2 (краевая задача): 8
19	РУБЦОВА ТАТЬЯНА ЮРЬЕВНА	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 6, табл 2 - 12, Подвариант 2 (краевая задача): 5
20	РЫЛОВ СТЕПАН МИХАЙЛОВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 2, табл 2 - 10, Подвариант 2 (краевая задача): 15
21	СОЛОВЬЕВ ГЛЕБ ГЕННАДЬЕВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 3, табл 2 - 19, Подвариант 2 (краевая задача): 2
22	ТИТОВА АЛЕКСАНДРА МИХАЙЛОВНА	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 4 табл 2 - 13, Подвариант 2 (краевая задача): 9
23	ТРОШКОВ АРТЕМ ИГОРЕВИЧ	Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 2, табл 2 - 10, Подвариант 2 (краевая задача): 8